

Capitolul 5. Capacitatea electrică. Condensatoare

5.1 Capacitatea electrică a unui conductor izolat

Într-un sistem finit de corpuri încărcate cu sarcini electrice, suma algebrică a sarcinilor sistemului poate fi diferită de zero sau egală cu zero. Un sistem de corpuri încărcate cu sarcină electrică, în care suma algebrică a sarcinilor corpurilor din sistem este egală cu zero, se numește sistem complet și el este caracterizat de faptul că toate liniile de câmp pornind din sarcinile pozitive ajung pe corpurile încărcate cu sarcini negative din interiorul sistemului și nici o linie de câmp nu sfârșește la infinit. În acest caz fluxul total printr-o suprafață închisă care înconjură sistemul este nul.

Dacă sarcina totală a sistemului finit de corpuri este diferită de zero, sistemul este un sistem incomplet, în acest caz rămân linii de câmp deschise care ajung la infinit. Se poate considera însă întotdeauna o suprafață sferică suficient de mare care să poarte o sarcină egală și de semn contrar cu sarcina totală a sistemului finit, pentru ca sistemul incomplet să aibă caracterul unui sistem complet.

Cel mai simplu sistem complet este format din doi conductori de o formă oarecare așezați la o distanță finită, foarte mare unul de celălalt, încărcăți

cu sarcini egale în valoare absolută dar de semne contrare ($q_1 > 0$ și $q_2 = -q_1 < 0$), Fig. 5.1. În acest caz toate liniile de câmp pornesc de la corpul încărcat cu sarcină pozitivă și sfârșesc pe cel încărcat cu sarcină negativă, fără a se pierde vreuna la infinit. Potențialele

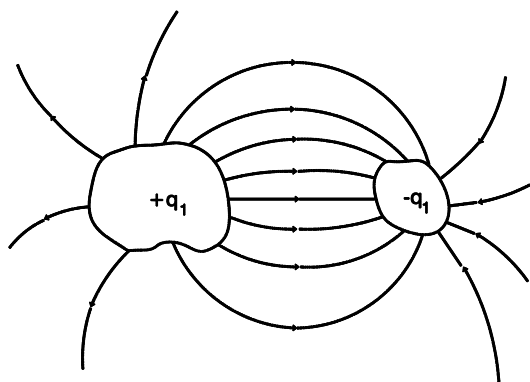


Fig. 5.1. Corpuri conductoare încărcate cu sarcini egale în valoare absolută dar de semne contrare

conductorilor sunt constante pe fiecare dintre ei și au valorile V_1 și V_2 , cu $V_1 > V_2$.

Se consideră, acum un corp conductor A, încărcat cu sarcina $+Q$, înconjurat de un sistem de corpuri conductoare B, C, D legate între ele prin fire conductoare și legate la Pământ, Fig.5.2. Fiind legate la Pământ potențialul fiecăruia dintre corpurilor B, C, D, este nul, ele fiind încărcate cu sarcinile negative: $-q_B$, $-q_C$, $-q_D$. Corpurile B, C, D sunt presupuse la distanțe mari între ele astfel încât să nu se influențeze reciproc. Sistemul considerat fiind complet, în virtutea legii de conservare a sarcinii electrice, se poate scrie:

$$Q - q_B - q_C - q_D = 0 \text{ sau } Q = q_B + q_C + q_D \quad (5.1)$$

Modul cum diversele sarcini q_B , q_C , q_D se distribuie pe corpurile B, C, D va depinde de forma lor geometrică, de poziția lor relativă și de proprietățile electrice ale mediului în care se află. Suprafața corpului A este o suprafață echipotențială cu potențialul V_A care poate fi exprimat în funcție de sarcinile de pe toate corpurile din sistem. Astfel dacă se va considera un element de suprafață dS , de pe corpul A, acesta poartă sarcina dq , care se află la distanța r_i ($i = A, B, C, D$) de suprafețele corpurilor A, B, C, D, și atunci conform principiului superpoziției și a teoremei elementelor corespondente, potențialul corpului A este:

$$V_A = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{4\pi\epsilon r_i} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\int_A \frac{dq}{r_A} + \int_B \frac{dq}{r_B} + \int_C \frac{dq}{r_C} + \int_D \frac{dq}{r_D} \right] \quad (5.2)$$

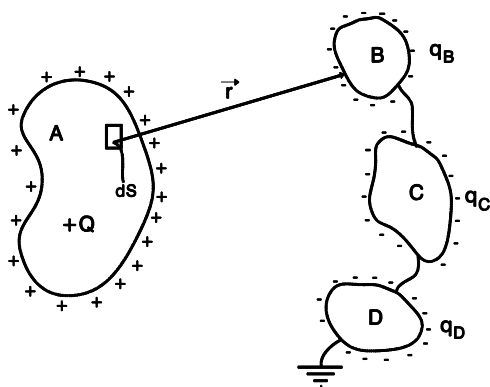


Fig.5.2 Corpuri conductoare la influență electrostatică maximă (sistem complet)

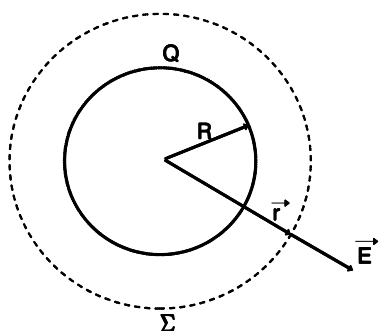
sarcinile de influență de pe corpu-rile B, C, D, rămase în aceleași poziții vor fi conform teoremei suprapunerii stărilor de echilibru $(-nq_B, -nq_C, -nq_D)$. Conform relației (5.2) potențialul conductorului A va fi, în noua stare de echilibru, nV_A , dat fiind că distan-țele r_i ($i = B, C, D$) nu variază. Punându-se întrebarea, ce relație există între sarcina Q pe care o poartă un conductor izolat, în cazul nostru A, și poten-țialul său V_A când acesta se află în stare de echilibru electrostatic, se con-stată că, raportul dintre sarcina Q a conductorului și potențialul său V rămâne constant. Acest raport:

$$C = \frac{Q}{V} \quad (5.3)$$

care este o caracteristică a conductorului izolat și care depinde numai de forma și dimensiunile suprafeței sale exterioare, se numește capacitatea conductorului izolat. Capacitatea se măsoară în farazi (F) - Faradul este o unitate foarte mare de aceea în practică capacitatea se exprimă, folosind submultipli acestuia.

Dacă se mărește sarcina de pe con-ductorul A de n ori, adică se cre-ează o nouă stare de echilibru prin suprapunerea a n stări de echilibru identice cu cea inițială în care con-ductorul A avea sarcina Q , atunci în noua stare de echilibru conduc-torul are sarcina nQ și respectiv

Conductorul sferic încărcat cu sarcina electrică Q la echilibru electrostatic, plasat în vid și depărtat față de alte conductoare va avea capacitatea dată



de: $C = Q/V$, unde V este potențialul său corespunzător stării de încărcare cu sarcina Q . Pentru a calcula capacitatea se determină inițial potențialul său V , care este chiar potențialul pe suprafața lui, cu ajutorul relației de definiție a potențialului:

$$V = - \int_{\infty}^R \vec{E} d\vec{l}$$

Fig. 5.3 Capacitatea unui conductor sferic izolat

Fig.5.3, rezultă: $\int_{\Sigma} \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}$ și

$$V = - \int_{\infty}^R \frac{Q dV}{4\pi\epsilon r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon R}$$

Deci:

$$C = \frac{Q}{V} \Rightarrow C = 4\pi\epsilon_0 R \quad (5.4)$$

Afirmația referitoare la faptul că faradul este o unitate foarte mare reiese de exemplu, din calculul capacității unui conductor sferic cu raza egală cu raza Pământului $R_p = 6370 \text{ Km}$:

$$C = 4\pi\epsilon_0 R_p = \frac{1}{9 \cdot 10^9} \cdot 6370 \cdot 10^3 = 0,707 \cdot 10^{-3} F$$

5.2. Coeficienții de influență, de capacitate, de potențial.

5.2.1 Coeficienți de influență, de capacitate.

Să stabilim acum ce relații există între sarcinile și potențialele conductoarelor care alcătuiesc un sistem în echilibru electrostatic acestea putând fi izolate sau menținute la potențiale constante. Vom considera din nou un sistem de n conductoare imobile $A_1, A_2, \dots, A_n$, situat departe de orice sarcini, sistem care se află în echilibru electrostatic, Fig. 5.4. Potențialul fiecăruia dintre conductoare este: $V_1, V_2, \dots, V_n$ iar sarcina totală de pe fiecare conductor (indiferent de modul de distribuire a ei pe suprafața conductorului) este: $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$. Starea electrică a sistemului la echilibru este descrisă așa cum am mai precizat de următorul tabel:

Conductoare:	A	A_1	A_2	$\dots$	A_i	$\dots$	A_n
Potențiale:	V	V_1	V_2	$\dots$	V_i	$\dots$	V_n
Sarcini:	Q	Q_1	Q_2	$\dots$	Q_i	$\dots$	Q_n

(5.5)

La această stare finală de echilibru se poate ajunge conform teoremei suprapunerii stărilor de echilibru, plecând de la stări de echilibru mult mai simple. Se va considera mai întâi că din sistemul celor n conductoare numai conductorul A_1 se află la potențialul $V_1 = 1$, iar toate celelalte conductoare sunt menținute la un potențial zero adică sunt legate la pământ. Liniile de câmp pornesc de pe conductorul A_1 și ajung pe celelalte conductoare sau la infinit. Deci numai conductorul 1 poartă sarcina pozitivă, a cărei valoare o vom nota cu C_{11} iar celelalte conductoare vor purta sarcini negative, (sarcinile de influență pozitive de pe ele sau scurs la pământ), Fig.5.4.

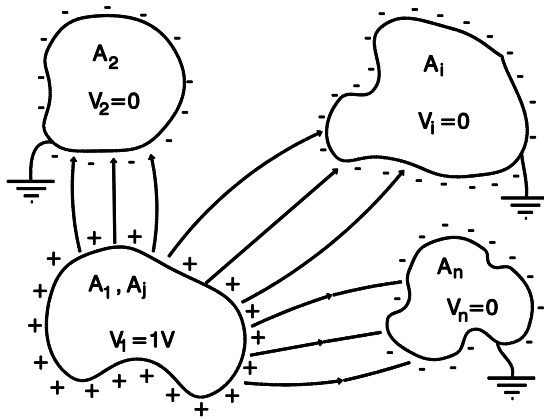


FIG.5.4 Sistem de conductoare la echilibru electrostatic

Aceste sarcini vor fi notate cu: $C_{21}, C_{31}, C_{i1}, C_{n1}$, (primul indice se referă la conductorul în cauză, iar al doilea precizează conductorul $V_1 = 1$ care influențează). Sarcinile acestea, sunt bine determinate, deoarece fiind date potențialele, starea de echilibru poate fi numai una singură,

conform teoremei unicității. Starea de echilibru a sistemului se poate descrie pe scurt prin tabelul urmator:

I	A	A_1	A_2	A_i	A_n
	V	1	0	0	0
	Q	C_{11}	C_{21}	C_{i1}	C_{n1}

în care $C_{11} = q_1$, $C_{21} = q_2$, $C_{n1} = q_n$, sunt sarcinile căpătate de fiecare conductor când conductorul 1 se află la potențialul $V_1 = +1$ V.

Evident prin suprapunerea a $m = V_1$ stări identice de tipul acesta, în care doar conductorul A_1 se află la potențialul $+1$ V, se obține o nouă stare de echilibru, care conform teoremei suprapunerii stărilor de echilibru, va fi caracterizată de un potențial pe conductorul A_1 , de $m = V_1$ ori mai mare decât $+1$ V și respectiv de sarcinile de pe toate conductoarele multiplicare cu $m = V_1$, mai concret noua stare de echilibru va fi descrisă de tabelul I':

I'	A	A_1	A_2	A_i	A_n
	V	V_1	0	0	0
	Q	$C_{11}V_1$	$C_{21}V_1$	$C_{i1}V_1$	$C_{n1}V_1$

Se constată deci, că în aceste condiții când unul dintre conductoare $A_j(A_1)$ se află la un potențial diferit de zero $V_j(V_1) \neq 0$, iar celelalte conductoare ale sistemului au potențialul nul $V_{i \neq j} = 0$, sarcina de pe fiecare conductor este proporțională cu potențialul care nu este nul, de exemplu V_j al conductorului A_j . Sarcina de pe conductorul A_i va avea o expresie de forma

$q_i = C_{ij}V_j$, unde constanta C_{ij} depinde numai de poziția relativă în sistem a tuturor conductoarelor care-l constituie, adică depinde numai de parametrii geometrici ai sistemului. Făcând acum ca doar A_2 să se afle la potențialul $+1V$ iar celelalte conductoare la potențial zero, se obține o nouă stare de echilibru descrisă de tabelul II, iar apoi creată o nouă stare:

II A	A_1	A_2	...	A_n
V	0	$+1V$	...	Q
Q	C_{12}	C_{22}	...	C_{n2}

de echilibru prin suprapunerea de $n = V_2$ ori a acesteia stare, care va fi caracterizată de tabelul:

II' A	A_1	A_2	...	A_n
V	0	V_2	...	0
Q	$C_{12}V_2$	$C_{22}V_2$	...	$C_{n2}V_2$

Procedând în mod asemănător cu fiecare conductor, presupunând ca el să fie inductor într-o anumită stare de echilibru electrostatic al sistemului, se vor obține stările de echilibru descrise prin tabelul următor:

(I) A	A_1	A_2	...	A_n
V	V_1	0	...	0
Q	$C_{11}V_1$	$C_{21}V_1$	...	$C_{n1}V_1$
(II) V	0	V_2	...	0
Q	$C_{12}V_2$	$C_{22}V_2$	...	$C_{n2}V_2$

(N) V	0	0	...	V_n
Q	$C_{1n}V_n$	$C_{2n}V_n$	...	$C_{nn}V_n$

(5.6)

Suprapunând toate aceste stări de echilibru se obține o nouă stare de echilibru în care fiecare dintre conductoare are potențialul pe care l-a avut în starea de echilibru anterioară a sistemului. Totodată pe baza teoremelor unicității și suprapunerii stărilor de echilibru, fiecare conductor va purta în această stare de echilibru o sarcină totală formată din suma sarcinilor căpătate pe rând în fiecare din stările descrise. De exemplu conductorul A_1

va purta sarcina: $Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + \dots + C_{1n}V_n$. Ca urmare relațiile dintre sarcinile și potențialele conductoarelor care alcătuiesc un sistem în echilibru electrostatic sunt:

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_{11}V_1 + C_{12}V_2 + \dots + C_{1n}V_n \\ Q_2 &= C_{21}V_1 + C_{22}V_2 + \dots + C_{2n}V_n \\ &\text{-----} \\ Q_n &= C_{n1}V_1 + C_{n2}V_2 + \dots + C_{nn}V_n \end{aligned} \quad (5.7)$$

adică în general:

$$Q_i = \sum_{j=1}^n C_{ij}V_j \quad (5.8)$$

S-a demonstrat astfel o teoremă care poate fi enunțată astfel:

În cazul unui sistem de conductoare imobile în echilibru electrostatic fiecare dintre acestea poartă o sarcină totală care este o funcție liniară și omogenă de potențialele tuturor acestor conductoare. Coeficienții de tipul: C_{ii} (diagonali) din relațiile de mai sus se numesc coeficienți de capacitate și reprezintă capacitatea conductorului A_i , în prezența celorlalte conductoare. Această capacitate C_{ii} , este diferită de capacitatea aceluiași conductor izolat. Coeficienții C_{ij} (nediagonali) se numesc coeficienți de influență (sau capacități mutuale) astfel C_{ij} este coeficientul de influență a conductorului A_j asupra conductorului A_i , în prezența celorlalte conductoare din sistemul la echilibru electrostatic. Coeficienții C_{ij} sunt elementele matricei pătrate $\{C\}$:

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \text{-----} \\ C_{n1} & C_{n2} & \dots & C_{nn} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Această matrice este simetrică, adică $C_{ij} = C_{ji}$, având elementele diagonale C_{ii} pozitive și cele nediagonale $C_{ij} = C_{ji}$ negative.

Dacă sunt scrise matricile coloană ale sarcinilor și potențialelor tuturor conductoarelor, sub forma:

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix} \quad \text{și} \quad [V] = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$$

atunci sistemul (5.7) se poate scrie:

$$\{Q\} = \{C\} \{V\} \quad (5.10)$$

Observație: În mod frecvent toți coeficienții sistemului (5.7) poartă denumirea de coeficienți de influență. Acești coeficienți care nu depind decât de forma și dimensiunile conductoarelor și de pozițiile lor relative în sistem, au aceleași dimensiuni ca și capacitatea, deoarece reprezintă rapoar-te între sarcini și potențialele și se măsoară în (F). Așa cum s-a văzut, dacă numai unul din conductoare A_j este menținut la un potențial pozitiv con-stant $V_j > 0$, iar celelalte sunt menținute la potențial nul, atunci numai pe conductorul A_j va exista o sarcină pozitivă valoarea ei fiind: $Q_{jj} = C_{jj}V_j > 0$ - deoarece liniile de câmp pornesc numai de pe acest conductor. Pe celelalte conductoare la care ajung liniile de câmp, care pornesc de pe conductorul A_j , se vor afla sarcini negative de valoare $C_{ij}V_j < 0$. Cum $V_j > 0$, rezultă proprietatea că $C_{ij} < 0$. Deci numai coeficienții de capacitate C_{jj} sunt pozi-tivi, iar cei de influență sunt tot timpul negativi $C_{ij} < 0$. O altă proprietate a acestor coeficienți o găsim astfel: dacă numai conductor A_j este la potenți-alul $V_j = +1V$, atunci și el poartă sarcina $+C_{ji}V_i = C_{jj} > 0$. După teorema elementelor corespondente valoarea absolută a unei sarcini aflate pe toate celelalte conductoare este cel mult egală cu C_{jj} , adică:

$$C_{jj} \geq \sum_{j \neq i} C_{ij} \quad (5.11)$$

Egalitatea va avea loc numai atunci când nici o linie de câmp care pleacă de pe A_j , nu ajunge la infinit adică atunci când influența este totală, adică unul din conductoarele influențate înconjoară complet conductorul A_j .

Exemplu de calcul al coeficienților de influență:

Calculul acestor coeficienți se face, de regulă, în cazuri simple.

Exemplu: Se consideră două sfere de raze R_1 și R_2 , care se găsesc la distanța d mare în raport cu razele lor, Fig.5.5, $d \gg R_1, R_2$. Pe cele două sfere se găsesc sarcinile q_1 și q_2 .

Potențialele acestor sarcini în O_1 vor fi:

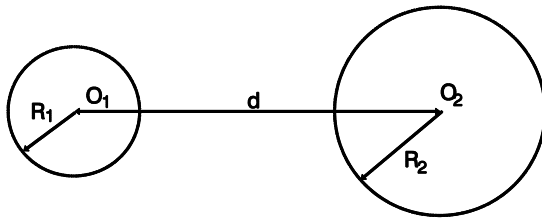


Fig. 5.5 Coeficienții de capacitate ai unui sistem de două sfere conductoare

$$V_{11} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \quad \text{și} \quad V_{12} = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 d}$$

asa încât în punctul O_1 , potențialul este:

$$V_1 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 d} \quad (5.12)$$

În mod similar, potențialul în punctul O_2 este:

$$V_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \quad (5.13)$$

Rezolvând sistemul format din ecuațiile (5.12) și (5.13), astfel:

$$\begin{aligned} q_2 &= 4\pi\epsilon_0 d \left[V_1 - \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \right] \Rightarrow \\ q_1 &= 4\pi\epsilon d \left[R_2 V_2 - d V_1 + \frac{q_1 d}{4\pi\epsilon R_1} \right] \Rightarrow q_1 \left(1 - \frac{d^2}{R_1} \right) = 4\pi\epsilon d (-d V_1 + R_2 V_2) \Rightarrow \\ q_1 &= \frac{4\pi\epsilon d (d V_1 - R_2 V_2)}{\frac{d^2}{R_1} - 1} \approx \frac{4\pi\epsilon d^2 V_1}{\frac{d^2}{R_1}} - \frac{4\pi\epsilon d R_2 V_2}{\frac{d^2}{R_1}} \end{aligned}$$

Se obțin sarcinile lor, în funcție de potențiale, care sunt exprimate prin:

$$\begin{aligned} q_1 &= 4\pi\epsilon R_1 V_1 - \frac{4\pi\epsilon R_1 R_2 V_2}{d} = C_{11} V_1 + C_{12} V_2 \Rightarrow \begin{cases} C_{11} = 4\pi\epsilon R_1 \\ C_{12} = -\frac{4\pi\epsilon R_1 R_2}{d} \end{cases} \\ q_2 &\approx -\frac{4\pi\epsilon R_1 R_2 V_1}{d} + 4\pi\epsilon R_2 V_2 = C_{21} V_1 + C_{22} V_2 \Rightarrow \begin{cases} C_{21} = -\frac{4\pi\epsilon R_1 R_2}{d} \\ C_{12} = 4\pi\epsilon R_2 \end{cases} \end{aligned}$$

Aici apar coeficienții de capacitate C_{11} și C_{22} ca fiind capacitățile conductoarelor izolate pentru că s-a considerat că $d \gg R_1, R_2$. În general, însă expresiile lor sunt așa cum apar în soluțiile exacte ale sistemului de mai sus..

5.2.2 Coeficienții de potențial.

În cazul general al unui sistem de n conductoare imobile purtând sarcinile: $Q_1 \dots Q_n$ la potențialele respective $V_1 \dots V_n$, apelând din nou la teorema supra-punerii stărilor de echilibru, se poate deduce o relație generală și între potențialele conductoarelor și sarcinile de pe ele. Pentru aceasta, o stare de echilibru electrostatic, se poate realiza prin suprapunerea unor stări de echilibru mai simple. Fie de exemplu numai conductorul A_j încărcat cu sarcina Q_j , toate celelalte conductoare având sarcini nule. În acest caz conductorul A_j va avea potențialul: $V_{jj} = S_{jj} \cdot Q_j$, proporțional cu sarcina de pe el, iar un alt conductor A_i va avea potențialul: $V_{ij} = S_{ij} \cdot Q_j$, proporțional cu sarcina Q_j de pe conductorul inductor A_j , sarcina lui A_i fiind nulă ca și a celorlalte conductoare exceptând A_j . Ca și-n tratarea anterioară, înșiruirea de stări de echilibru care prin suprapunere vor conduce la starea finală $(Q_1 \dots Q_n \text{ și } V_1 \dots V_n)$ este descrisă de tabelul:

	A	A_1	A_2	...	A_n	
I	Q	Q_1	0	...	0	
	V	$S_{11}Q_1$	$S_{21}Q_1$	...	$S_{n1}Q_1$	(5.14)
II	Q	0	Q_2	...	0	
	V	$S_{12}Q_2$	$S_{22}Q_2$	...	$S_{n2}Q_2$	

N	Q	0	0	...	Q_n	
	V	$S_{1n}Q_n$	$S_{2n}Q_n$	...	$S_{nn}Q_n$	

Suprapunând aceste stări de echilibru se obține în noua stare de echilibru potențialele conductoarelor în funcție de sarcinile lor care vor fi date de:

$$\begin{cases} V_1 = S_{11}Q_1 + S_{12}Q_2 + \dots + S_{1n}Q_n \\ V_2 = S_{21}Q_1 + S_{22}Q_2 + \dots + S_{2n}Q_n \\ \text{-----} \\ V_n = S_{n1}Q_1 + S_{n2}Q_2 + \dots + S_{nn}Q_n \end{cases} \quad (5.15)$$

sau:

$$V_i = \sum_{j=1}^n S_{ij}Q_j \quad (5.16)$$

Asociind coeficienților S_{ij} o matrice pătrată $\{S\}$, iar potențialelor V_i și sarcinilor Q_j matricile coloană $\{V\}$ respectiv $\{Q\}$, sistemul de ecuații liniare (5.15) se poate scrie matriceal, în forma:

$$[V] = [S] \cdot [Q] \quad (5.17)$$

Din sistemul de ecuații liniare (5.15) rezultă că fiecare conductor din sistem influențează potențialele celorlalte conductoare într-un anume fel, care depinde numai de configurația geometrică a sistemului de conductoare și de sarcina conductorului respectiv. Coeficienții S_{ij} au fost numiți de către Maxwell coeficienți de potențial; ei au dimensiunile inverselor unor capa-cități (fiind raport de potențial pe sarcină) și se numesc elastanțe. Unitatea de măsură pentru elastanță, F^{-1} , nu are încă un nume oficial, adesea în electrotehnică, se obișnuiește a se numi *daraf*. Elementele de tip diagonal din (5.15), S_{jj} se numesc elastanțe proprii. Elastanța proprie S_{jj} a conductorului A_j reprezintă raportul dintre potențialul conductoarelui A_j și sarcina lui proprie Q_j când sarcinile de pe celelalte conductoare sunt nule. Coeficienții nediagonali S_{ij} se numesc elastanțe mutuale. Elastanța mutuală între conductorul A_i și A_j , S_{ij} reprezintă raportul dintre potențialul conductoarelui A_i și sarcina de pe conductorul inductor A_j când sarcinile de pe celelalte conductoare sunt nule. Toți coeficienții de potențial S sunt pozitivi pentru că orice creștere de sarcină pozitivă de pe oricare din corpurile conductoare conduce la o creștere pozitivă a potențialelor pe

toate corpurile. Coeficienții S_{ij} și S_{ji} sunt egali între ei deci și matricea $\{S\}$ este simetrică. ^ai aici, un exemplu simplu, va arăta utilitatea acestor coeficienți. *Exemplu.* Fie un sistem de două conductoare filiforme identice de lungime l ce se influențează reciproc formând un sistem complet, Fig.5.6. Să calculăm capacitatea acestui sistem, conductoarele având raza r și aflate la distanța $d \gg r$ între ele. Presupunând sarcinile Q_1 și Q_2 pe conductoare potențialele fiecărui conductor vor fi conform sistemului de ecuații (5.15).

$$\begin{cases} V_1 = S_{11}Q_1 + S_{12}Q_2 \\ V_2 = S_{21}Q_1 + S_{22}Q_2 \end{cases} \quad (5.18)$$

Dar sistemul celor două conductoare, fiind complet, rezultă:

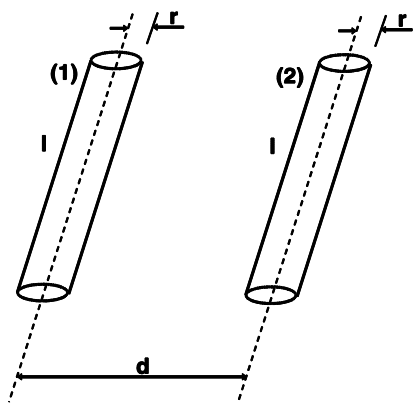


Fig.5.6 Coeficienții de potențial ai unui sistem de două conductoare filiforme la echilibru electrostatic

$$Q_1 + Q_2 = 0 \Rightarrow Q_1 = -Q_2 = Q \Rightarrow Q_1 = Q \text{ și } Q_2 = -Q$$

$$V_1 = S_{11}Q - S_{12}Q = (S_{11} - S_{12})Q$$

$$V_2 = S_{21}Q - S_{22}Q = (S_{21} - S_{22})Q \quad (5.19)$$

Dar conductoarele fiind identice $S_{11} = S_{22}$ și elastațele mutuale egale ($S_{12} = S_{21}$), rezultă:

$$V_1 - V_2 = Q[(S_{11} - S_{12}) - (S_{21} - S_{22})] =$$

$$Q[(S_{11} - S_{12}) + (S_{11} - S_{12})] = 2Q(S_{11} - S_{12})$$

Capacitatea sistemului este prin definiție

$C = Q/(V_1 - V_2)$ (așa cum se va vedea în cele ce urmează), deci:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{1}{2(S_{11} - S_{12})} \quad (5.20)$$

Dar pentru calculul elastațelor trebuie exprimate potențialele V_1 și V_2 create de conductorul 1 încărcat cu Q într-un punct de pe el și într-un punct de pe conductorul 2. Pentru aceasta ar trebui cunoscut potențialul creat la distanța a față de un conductor

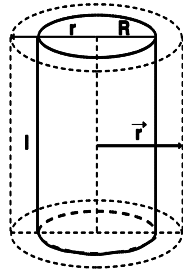


Fig.5.7 Calculul câmpului electric și a potențialului unui conductor încărcat cu densitate de sarcină liniară λ

electrizat. Calculul acestuia se poate face apelând direct la principiul superpoziției. Practic, conductorul având formă cilindrică de rază R și sarcina fiind distribuită uniform pe suprafața lui, Fig.5.7, câmpul într-un punct din exterior este conform teoremei Gauss:

$$\int \vec{E} d\vec{S} = \frac{q_i}{\epsilon_0} \Rightarrow E 2\pi r l = 2\pi R l \sigma \Rightarrow \vec{E} = \frac{\sigma R}{r} \frac{\vec{r}}{r}$$

Dacă sarcina de pe conductor, $Q = 2\pi R \sigma l$, se exprimă prin densitatea liniară λ_C ($Q = l \lambda_C$),

atunci $\lambda_C = 2\pi R \sigma \Rightarrow \vec{E} = \frac{2\pi R \sigma}{2\pi r} \frac{\vec{r}}{r} = \frac{\lambda_C}{2\pi r} \frac{\vec{r}}{r}$, adică practic câmpul în exteriorul cilindrului are aceeași formă ca și câmpul creat de un fir încărcat cu λ_C , plasat pe axa cilindrului. Din aceste considerente și potențialul creat la suprafața cilindrului într-un punct oarecare din exterior se consideră analog potențialului creat la o distribuție liniară de sarcină cu λ_C , aflată pe axa cilindrului. Ori sistemul, fir elektrizat cu λ , de lungime finită l , a fost analizat și s-a calculat câmpul într-un punct la distanța r de el, având componentele:

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{\lambda}{4\pi r^2} (\sin \theta_1 + \sin \theta_2) \\ E_y &= -\frac{\lambda}{4\pi r^2} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \end{aligned} \quad (5.21)$$

Pentru calculul potențialului însă, este dificil să se apeleze la relația de definiție:

$V = -\int_{\infty}^r \vec{E} d\vec{l}$, pentru că integrala este divergentă. De aceea se apelează din nou la principiul superpoziției. Astfel elementul dl , Fig. 5.8, poartă sarcina $dq = \lambda dl$ și va crea, la distanța R față de el potențialul elementar:

$$dV = \frac{\lambda dy}{4\pi \epsilon_0 R} = \frac{\lambda dy}{4\pi \epsilon_0 \sqrt{r^2 + y^2}}$$

Atunci potențialul, în acel punct, va fi:

$$V = \int_{l_1}^{l_2} \frac{\lambda dy}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + y^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[y + \sqrt{r^2 + y^2} \right] \Big|_{l_1}^{l_2} \Rightarrow V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{\sqrt{r^2 + y^2} + l_2}{\sqrt{r^2 + y^2} - l_1} \right]$$

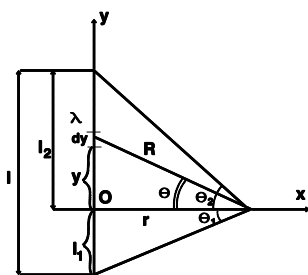


Fig.5.8 Calculul potențialului unui conductor liniar de lungime finită, încărcat cu densitatea de sarcină liniară λ

Dar conductorul fiind foarte lung, ($l \gg r$), se poate presupune că punctul P este pe medietatea conductorului și atunci: $l_2 = l_1 = l/2$.

În acest caz:

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^{l/2} \frac{\lambda dy}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + y^2}} = \frac{2\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{r^2 + \frac{l^2}{4}} + \frac{l}{2}}{\sqrt{r^2 + 0} - 0} \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{2r} \left[\left(1 + \frac{4r^2}{l^2} \right)^{1/2} + 1 \right] \cong \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{l}{r} \end{aligned}$$

Deci potențialul unui conductor de lungime finită l , într-un punct aflat la distanța r față de el, este cu bună aproximație:

$$V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{l}{r} \quad (5.22)$$

Dacă conductorul electrizat este infinit de lung evident nu poate fi vorba de potențialul unui anumit punct, întrucât valoarea lui ar fi infinită. Se poate vorbi numai de diferența de potențial dintre două puncte, care se calculează pe baza relației:

$$V_{12} = V_1 - V_2 = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{1}{r_1} - \ln \frac{1}{r_2} \right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (5.23)$$

dacă punctele sunt la distanțele r_1 și r_2 de conductor.

Revenind la cele două conductoare, de rază r fiecare și aflate la distanța d unul de celălalt, în baza celor discutate mai sus, se poate scrie potențialul unui punct de pe conductorul (1) și de pe conductorul (2) astfel: potențialul propriu al conductorului (1) este:

$$V_1 = \frac{\lambda_s}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{r}$$

unde $\lambda_s = 2\pi r \sigma$ este densitatea de sarcină specifică liniară. Deci:

$$V_1 = S_{11} \lambda_s = \frac{\lambda_s}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{r} \Rightarrow S_{11} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{r} \quad (5.24)$$

Conductorul (1) încărcat cu λ_s va crea într-un punct de pe conductorul (2) potențialul:

$$V_2 = \frac{\lambda_S}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{d}$$

Deci:

$$V_2 = S_{21}\lambda_S = S_{12}\lambda_S = \frac{\lambda_S}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{d} \Rightarrow S_{12} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{d} \quad (5.25)$$

Cu acestea:

$$C = \frac{1}{2(S_{11} - S_{12})} = \frac{1}{2 \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \left(\ln \frac{1}{r} - \ln \frac{1}{d} \right)} \Rightarrow C = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d}{r}} \text{ F / m} \quad (5.26)$$

Analog pentru a calcula S_{22} și S_{21} :

$$\begin{aligned} V_2 &= -S_{22}\lambda_S = \frac{-\lambda_S}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{r} \Rightarrow S_{22} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{r} = S_{11} \\ V_1 &= -S_{12}\lambda_S = \frac{-\lambda_S}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{d} \Rightarrow S_{12} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{1}{d} = S_{21} \end{aligned} \quad (5.27)$$

5.3. Condensatorul electric. Capacitatea unui condensator.

5.3.1. Capacitatea unui conductor vecin cu un alt conductor.

Să considerăm un conductor metalic A sub formă de disc și să-l punem în legătură cu polul pozitiv al unui generator situat departe de conductor, polul negativ al sursei fiind legat la pământ, Fig.5.9. Dacă potențialul conductorului A este V_0 , atunci el poartă sarcina:

$$Q_0 = C_0 V_0 \quad (5.28)$$

unde Q_0 este capacitatea conductorului A, considerat izolat de alte conduc-

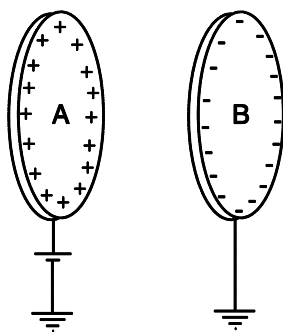


Fig.5.9 Doua discuri conductoare la influență electrostatică maximă

toare. Apropiind de A un alt disc conductor legat la pământ, deci la potențialul $V_B = 0$, pe conductorul B va apare o sarcină de influență negativă dată de $Q_B = C_{BA} V_A$ unde constanta C_{BA} este negativă și reprezintă capacitatea mutuală dintre B și A

deoarece reprezintă raportul dintre sarcina care apare pe conductorul B, când conductorul A este ținut la potențialul V_A , iar $V_B = 0$. Sarcinile negative de influență care apar pe discul B, vor face să apară, tot prin influență, pe conductorul A sarcini pozitive suplimentare, și la rândul lor acestea determină apariția sarcinii negative suplimentare pe B, ș.a.m.d., influența continuând, până când sistemul celor două conductoare se află în echilibru electrostatic.

În starea de echilibru atinsă de sistem, pe conductorul A se găsesc mai multe sarcini decât atunci când era izolat. Se spunea mai înainte, de către fizicieni, că a avut loc "fenomenul de condensare a sarcinilor electrice", de aceea ansamblului AB format din cele două conductoare apropiate i s-a dat numele de condensator. Capacitatea conductorului A în prezența conductorului B legat la pământ a crescut, pentru că în prezența conductorului B, cu $V_B = 0$, conductorul A menținut la potențialul V_0 , va purta sarcina:

$$Q = C_{AA} V_0 > Q_0 = C_0 V_0 \quad (5.29)$$

Rezultă $C_{AA} > C_0$, deci capacitatea unui conductor aflat în prezența altui conductor, legat la pământ, este mai mare decât capacitatea conductorului izolat (depărtat practic la infinit de alte conductoare legate la pământ). Pe conductorul A nu s-a creat sarcină, surplusul de sarcină provine de la generator, prin faptul că electronii de pe conductorul A sunt respinși către sursă de electronii apăruiți prin influență pe conductorul B.

5.3.2. Capacitatea unui condensator.

În sensul larg al termenului, *se numește condensator orice ansamblu binar de conductoare separate printr-un mediu dielectric sau vid, aflate la influență electrostatică maximă*. Sistemul celor două conductoare numite

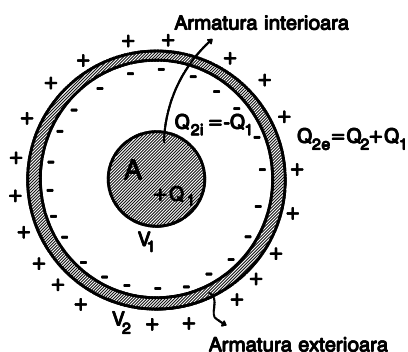


Fig. 5.10. Sistem complet de conductoare

armături formează un sistem complet în sensul precizat în 5.1., echivalent de altfel cu sensul de influență electrostatică maximă, sau totală. De regulă pentru ca sistemul de conductoare să fie complet adică să se afle în condiții de influență totală (toate liniile de câmp care pornesc din conductorul cu $Q > 0$ să ajungă pe cel cu $Q < 0$), atunci unul din conductoare aici armătura exterioară, trebuie să înconjoare complet pe cel de-al doilea, aici armătura interioară, Fig. 5.10. Dacă armăturile A și B se găsesc la potențialele V_1 și V_2 atunci, conform relațiilor Maxwell general valabile în sistemele de conductoare la echilibru electrostatic, ele vor purta sarcinile:

$$\begin{cases} Q_1 = C_{11} V_1 + C_{12} V_2 \\ Q_2 = C_{21} V_1 + C_{22} V_2 \end{cases} \quad (5.30)$$

Trebuie, însă, să se țină seama de faptul că influența electrosatică este maximă (totală). Ori aceasta înseamnă că toate liniile de câmp care pornesc de pe A când $V_1 > 0$, ajung pe corpul B, determinând inducerea unei sarcini de influență pe fața interioară a lui B, sarcină care, conform teoremei elementelor corespondente, va fi tocmai $-Q_1$. Ori, s-a definit

coeficientul de influență dintre sfera B și A ca fiind: $C_{21} = \frac{Q_2}{V_1}$ când $V_1 > 0$ și $V_2 = 0$, deci în acest caz: $Q_2 = C_{21} V_1 = -Q_1$.

Dar $Q_1 = C_{11} V_1 \Rightarrow C_{11} V_1 = -C_{21} V_1 \Rightarrow C_{11} = -C_{21} = -C_{12}$.

Notând $C_{11} = -C_{21} = -C_{12} = C$ ecuațiile (5.30) se vor scrie sub forma:

$$\begin{cases} Q_1 = CV_1 - CV_2 = C(V_1 - V_2) \\ Q_2 = -CV_1 + C_{22}V_2 = -C(V_1 - V_2) + (C_{22} - C)V_2 \end{cases} \quad (5.31)$$

În a doua ecuație din (5.31) am adunat și am scăzut CV_2 . Notând $V_1 - V_2 = U_{12}$ și $C_{22} - C = C'$ rezultă:

$$\begin{aligned} Q_1 &= CU_{12} \\ Q_2 &= -CU_{12} + C'V_2 \end{aligned} \quad (5.32)$$

Pentru că pe armătura A se află sarcina $Q_i = Q = CU_{12}$, pe suprafața interioară a armăturii B se va afla sarcina $-Q = -CU_{12}$ iar pe fața exterioară a armăturii B se va găsi $Q_e = C'V_2$. Sarcina Q_e nu depinde de sarcinile de pe A și de pe suprafața interioară a armăturii B, de exemplu dacă acestea sunt nule, sarcina Q_e este aceeași ca și când conductorul B singur este adus la potențialul V_2 . Deci C' reprezintă capacitatea armăturii externe când este singură (izolată). Sarcina Q_e nu are importanță în utilizarea unui condensator. În primul rând când se folosește un condensator, acesta după ce se încarcă, va fi descărcat prin legarea celor două armături cu un fir conductor. În acest fel, sarcinile Q de pe A și $-Q$ de pe fața interioară lui B se neutralizează, pe fața exterioară a lui B rămânând sarcina Q_e , iar potențialul sistemului fiind V_2 . În al doilea rând deoarece capacitatea unui conductor izolat este foarte mică în raport cu cea a unui condensator (așa cum s-a remarcat în paragraful anterior), sarcina Q_e este neglijabilă față de Q . Adesea $Q_e = 0$, pentru că armătura exterioară a condensatoarelor se pune la pământ și atunci $V_2 = 0$. Numai în aceste condiții condensatorul este complet descărcat (altfel acesta mai poartă sarcina Q_e , deși cele două armături s-au pus în contact). Deaceia sarcina armăturii interioare se numește sarcina condensatorului. Neglijând Q_e se poate scrie în general capacitatea unui condensator ca:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{U_{12}} \quad (5.33)$$

Mărimea pozitivă definită de câtul dintre sarcina unui dintre conductoare și diferența de potențial dintre el și celălalt se numește capacitatea electrică a condensatorului. Acum, se poate defini Faradul ca fiind capacitatea unui condensator electric, care având aplicată la armăturile sale o diferență de potențial de un volt, se încarcă cu o sarcină electrică de un Coulomb.

5.3.3. Calculul capacității unor condensatoare simple.

Cunoscând forma geometrică a armăturilor poziția lor relativă și natura dielectricului se determină succesiv: a) Repartiția densității de sarcină σ pe fiecare armătură; b) Configurația câmpului electric între armături apelând, de regulă, la teorema Gauss;

c) Cunoscând câmpul se calculează diferența de potențial $V_1 - V_2$ între cele două armături pornind de la relația de definiție a tensiunii electrice între două puncte:

$$U_{12} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} \quad (5.34)$$

d) Se calculează sarcina pe armătura interioară folosind:

$$Q = \int_S \sigma dS \quad (5.35)$$

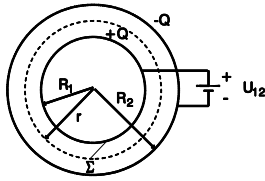
e) Atunci:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{U_{12}} \quad (5.36)$$

Metoda indicată aici se poate aplica dacă se cunoaște ecuația liniilor de câmp sau făcând anumite ipoteze simplificatoare asupra configurației câmpului.

5.3.3.1. Condensatorul sferic. Este un sistem format din două sfere conductoare de raze R_1 și R_2 concentrice separate între ele printr-un mediu dielectric de permitivitate ε și având între armături o diferență de potențial, Fig.5.11: $U_{12} = V_1 - V_2$

Sub acțiunea diferenței de potențial sistemul se încarcă cu o sarcină $+Q$ pe armătura interioară și $-Q$ pe cea exterioară. Așa cum precizam calculul capacității presupune calculul diferenței de potențial U_{12} lucru care este posibil după ce se găsește intensitatea câmpului electric dintre armături. Considerând o Gaussiană sferică Σ , de rază $R_1 < r < R_2$ rezultă:



$$\int_{\Sigma} \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon} \Rightarrow E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q\vec{r}}{4\pi\epsilon r^3} \quad (5.37)$$

Cu acesată diferența de potențial U_{12} va fi:

$$U_{12} = \frac{Q}{4\pi\epsilon} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (5.38)$$

Conform definiției capacității aceasta va fi:

$$C = \frac{Q}{U_{12}} = \frac{Q}{\frac{Q}{4\pi\epsilon} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}} = 4\pi\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \quad (5.39)$$

Fig.5.11 Condensatorul electric sferic

Dacă armătura exterioară are raza, care tinde la infinit, rezultă practic capacitatea unui conductor sferic izolat în spațiu astfel:

$$C_i = \lim_{R_2 \rightarrow \infty} 4\pi\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 4\pi\epsilon R_1 \quad (5.40)$$

Făcând raportul dintre capacitatea unei sfere izolate C_i și capacitatea a două sfere concentrice, se obține:

$$\frac{C_i}{C} = \frac{4\pi\epsilon R_1}{4\pi\epsilon \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}} = \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} = 1 - \frac{R_1}{R_2} \quad (5.41)$$

relație care permite să se vadă care este influența pe care o poate avea o a doua suprafață sferică asupra capacității unei sfere izolate. Din relația (5.41) se poate aprecia astfel dacă o suprafață sferică, care înconjoară sfera - de exemplu pereții unei camere - poate avea vreo influență la măsurarea capacității sferei sau dacă ea poate fi neglijată. Remarcăm că atunci când $R_2 \gg R_1$ efectul celei de-a doua sferă (exterioară) poate fi neglijat. Invers în cazul în care distanța dintre armături este mică, expresia capacității condensatorului sferic poate fi pusă sub altă formă. Fie $R_2 - R_1 = d$ (distanța dintre armături) și $R = (R_1 + R_2)/2$ raza medie a celor două suprafețe sferice. Atunci:

$$\begin{cases} R_2 - R_1 = d \\ R_1 + R_2 = 2R \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_2 = \frac{2R + d}{2} = R + \frac{d}{2} \\ R_1 = \frac{2R - d}{2} = R - \frac{d}{2} \end{cases}$$

Deci:

$$C = 4\pi\epsilon \frac{\left(R - \frac{d}{2}\right)\left(R + \frac{d}{2}\right)}{R + \frac{d}{2} - R + \frac{d}{2}} = 4\pi\epsilon \frac{\left(R^2 - \frac{d^2}{4}\right)}{d} \cong \frac{4\pi\epsilon R^2}{d} = \frac{\epsilon S}{d} \quad (5.42)$$

în care $S = 4\pi R^2$ este aria suprafeței sferei intermediare. Capacitatea este astfel direct proporțională cu suprafața medie a armăturilor și invers proporțională cu distanța dintre cele două armături. În cazul în care dielectricul nu este omogen ci este format din straturi sferice dielectrice de grosimi diferite și permitivități diferite se calculează câmpul cu ajutorul teoremei Gauss în fiecare mediu și apoi se calculează diferența de

potențial între armături prin însumarea integralelor: $\int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_i d\vec{l}_i$ din fiecare dielectric.

5.3.3.2. Condensatorul cilindric.

Condensatorul cilindric este format din doi cilindri metalici coaxiali de raze R_1 și R_2 , lungimea lor fiind foarte mare, (practic infinită), în raport cu diferența

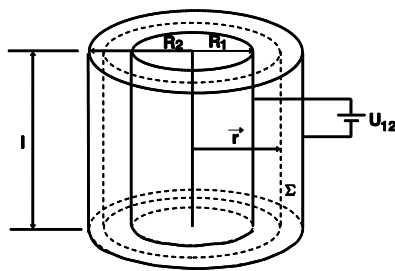


Fig.5.12. Condensatorul electric cilindric

diametrelor lor, Fig.5.12. Fie $U_{12} = V_1 - V_2$ diferența de potențial aplicată celor două armături. Câmpul electric între aceste două armături (când ele sunt foarte lungi) va avea simetrie radială depinzând numai de distanța r de la axul condensatorului. Teorema lui Gauss aplicată gaussienei Σ , conduce la:

$$\int_{\Sigma} \vec{E} d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon} \Rightarrow E 2\pi r l = \frac{Q}{\epsilon} \Rightarrow \vec{E} = \frac{Q}{2\pi \epsilon l r} \vec{r} \quad (5.43)$$

Q fiind sarcina de pe armătura interioară.

Cu aceasta:

$$U_{12} = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{2\pi \epsilon l} \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi \epsilon l} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

și deci:

$$C = \frac{Q}{U_{12}} = \frac{2\pi\epsilon l}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \quad (5.44)$$

În practică asemenea condensatoare sunt reprezentate prin cabluri electrice sau linii aeriene; capacitatea lor se exprimă pe unitatea de lungime și expresia ei este dată de relația:

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \frac{R_2}{R_1}} \left(\frac{F}{m} \right) \quad (5.45)$$

Scriind $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$ și luând $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9$, pentru un cablu coaxial cu lungimea de 1 Km rezultă:

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 \cdot \epsilon_r \cdot 10^3}{2 \ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{\epsilon_r}{18 \ln \frac{R_2}{R_1}} \left(\frac{\mu F}{Km} \right)$$

relație mult utilizată în practică.

5.3.3.3. Condensatorul electric plan.

A. Def. capacității.

Un condensator plan este format din două suprafețe, plane, paralele, metalice de arie S , așezate la o distanță d mică față de dimensiunile plăcilor. Între plăci se

găsește un dielectric oarecare de permitivitate ϵ , presupus omogen și izotrop,

Fig.5.13. Cele două plăci constituie armăturile condensatorului. Să presupunem că cele două plăci poartă respectiv sarcinile Q_1 și Q_2 . Conform teoremei

elementelor corespundente aceste sarcini trebuie să se distribuie pe cele două suprafețe în mod egal, semnele lor fiind

însă contrarii. Deci:

Deci:

$$Q_1 = -Q_2 = Q \Rightarrow Q_1 = Q \text{ și } Q_2 = -Q$$

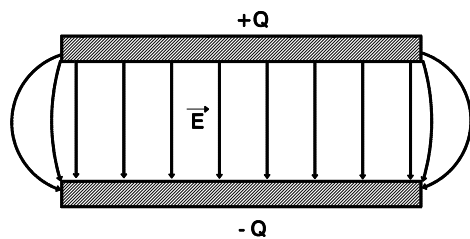


Fig.5.13 Condensatorul electric plan ----- 152 -----

Să presupunem că aceste sarcini se distribuie uniform pe cele două suprafețe cu densitatea de sarcină superficială σ ; în aceste condiții condensatorul se spune că este încărcat. Câmpul electric creat de aceste distribuții de sarcină de pe plăci, este diferit de zero numai între armături, unde se consideră uniform și are valoarea:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (5.46)$$

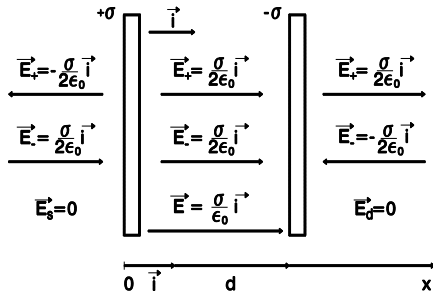


Fig.5.14 Câmpul electric dintre armăturile unui condensator plan

așa cum rezultă din figura 5.14. câmpul din exterior este nul. Atunci diferența de potențial:

$U_{12} = V_1 - V_2$ va fi:

$$U_{12} = \int_0^d \vec{E} d\vec{l} = \int_0^d \frac{\sigma}{\epsilon} dx = \frac{\sigma}{\epsilon} d$$

Deci capacitatea condensatorului va fi:

$$C = \frac{Q}{U_{12}} = \frac{\sigma S}{\frac{\sigma}{\epsilon} d} = \frac{\epsilon S}{d} \quad (5.47)$$

S-a găsit o relație similară cu cea a unui condensator sferic cu rază medie mare și cu distanța între armături foarte mică, așa încât putem afirma că un condensator plan poate fi considerat ca o parte dintr-un condensator sferic cu raza infinită, unde S reprezintă un element de dimensiuni finite din suprafața unei asemenea sfere.

B. Efectul de margine la un condensator electric.

Fie un condensator plan, format din armăturile plane A_1 și A_2 presupuse că au

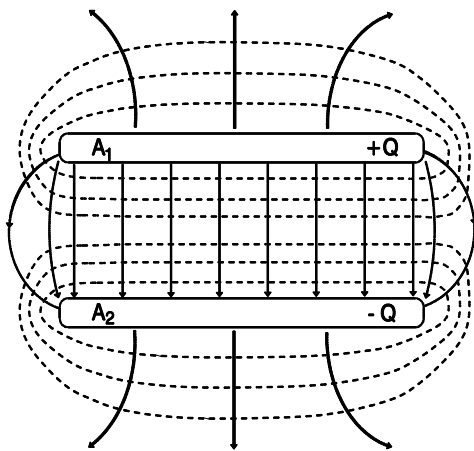


Fig.5.15 Efectul de margine la un condensator plan

lungimea, foarte mare față de lățimea lor, Fig.5.15. Armătura A_1 este presupusă încărcată cu sarcina $+Q$ care se repartizează pe întreaga ei supra-față atât pe fața internă cât și pe cea externă, cu deosebirea că pe fața internă densitatea de sarcină este mult mai mare decât densitatea de sarcină care se găsește pe fața externă. Situația este analoagă și pe

armătura A_2 , cu deosebirea că pe această armătură densitatea de sarcină este negativă. Distanța dintre cele două armături fiind foarte mică, intensitatea câmpului electrostatic dintre ele poate fi considerată uniformă, liniile de câmp sunt drepte echidistante, normale pe armături iar suprafețele echipotențiale sunt plane paralele cu armăturile. La extremități liniile de câmp se răsfiră și se lungesc. Ele fiind curbe deschise care se sprijină pe cele două armături, vor exista linii de câmp care pornesc de pe fața exterioară a armăturii A_1 , ajungând pe fața externă a armăturii A_2 . Suprafețele echipotențiale sunt însă suprafețe închise care înconjoară armăturile. Integrala de linie a câmpului electric dintre două puncte unul pe armătura A_1 și celălalt pe A_2 , este aceeași oricare ar fi poziția celor două puncte, pe fețele externe sau interne, și reprezintă tensiunea U_{12} dintre cele două armături:

$$U_{12} = V_1 - V_2 = \int_2^1 \vec{E} d\vec{l} \quad (5.48)$$

suprafața fiecărei armături fiind o suprafață echipotențială. Relația capacității condensatorului plan dedusă anterior:

$$C = \frac{\epsilon S}{d} \quad (5.49)$$

este valabilă numai pentru regiunea din spațiu unde câmpul electric este uniform. În realitate însă și capetele armăturilor împreună cu suprafețele lor exterioare formează un condensator electric având capacitatea C' așa încât capacitatea totală a condensatorului este:

$$C_t = C + C' \quad (5.50)$$

Fenomenul de răsfirare a liniilor de câmp și a suprafețelor echipotențiale precum și apariția capacității C' constituie efectul de margine al condensatorului. În practică $C' \ll C$ astfel că se poate neglija și $C_t = C$. Când însă este necesar a se delimita în mod riguros capacitatea C a unui condensator plan se realizează un dispozitiv în care cele

două armături A_1 și A_2 sunt înconjurate de câte o suprafață inelară, Fig.5.16, între aceste suprafețe stabilindu-se liniile de câmp corespunzătoare suprafețelor exterioare ale armăturilor, eliminând astfel efectul de margine. Acest sistem de

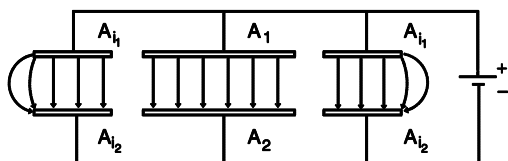


Fig.5.16 Eliminarea efectelor de margine în cazul condensatorului plan, folosind inelul de gardă

suprafețe constituie inelul de gardă. În acest montaj efectele de margine se transmit inelului de gardă, între armăturile principale A, câmpul electric rămânând perfect uniform și astfel capacitatea respectivă se poate determina riguros. Efectul de margine apare în special la condensatorul plan, poate însă să apară la orice formă de condensator, de regulă unde armăturile prezintă suprafețe fără o simetrie completă.

5.4. Rețele de condensatoare. Teoremele capacităților echivalente.

Capacitatea condensatorului este limitată prin construcție la o anumită valoare, de către dimensiunile armăturilor, forma lor, natura dielectricului. Pentru a obține o capacitate de valoare dorită, condensatoarele se grupează în baterii de condensatoare. Gruparea condensatoarelor se poate face în serie, în paralel și mixt. În cazul unei rețele de condensatoare cu două borne A și B de acces se numește capacitate echivalentă mărimea:

$$C_e = \frac{Q_A}{U_{AB}} = \frac{Q_B}{U_{BA}} \quad (5.51)$$

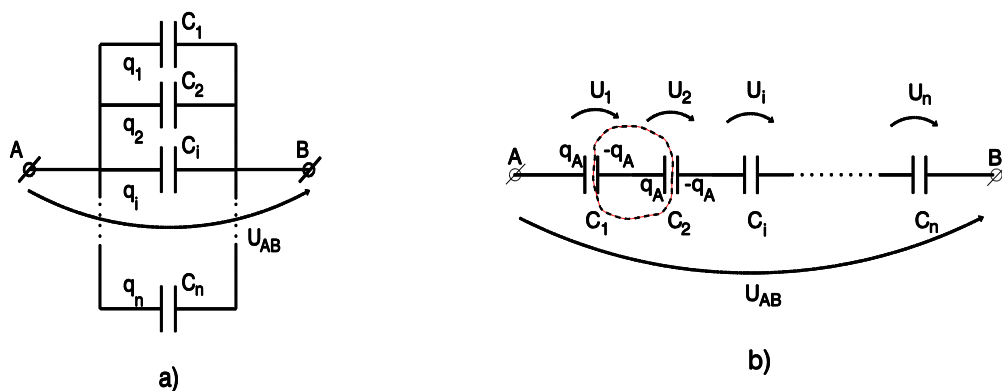


Fig.5.17 a) Grupare paralel de condensatoare; b) Grupare serie de condensatoare

în care $Q_A = -Q_B$ este sarcina absorbită pe la borna A, când se aplică tensiunea U_{AB} rețelei, inițial descărcată. Capacitatea echivalentă a unei grupări de condensatoare este deci capacitatea unui condensator care fiind supus la aceeași tensiune ca și sistemul de condensatoare se încarcă cu aceeași sarcină electrică ca și sistemul dat. În consecință în exteriorul

sistemului nu se constată nici o schimbare la înlocuirea rețelei cu condensatorul de capacitate echivalentă cu ea.

5.4.1. Gruparea condensatoarelor în paralel.

Gruparea în paralel, Fig.5.17 a), a mai multor condensatoare de capacitate C_i ($i = 1...n$), se face legând împreună toate plăcile de același nume, toate condensatoarele încărcându-se la aceeași tensiune $U_{AB} = V_A - V_B$. Fiecare condensator se încarcă cu sarcina:

$$q_i = C_i U_{AB}$$

asa încât sarcina totală absorbită pe la borna A când se aplică tensiunea U_{AB} este:

$$q_A = \sum_{i=1}^n q_i = \left(\sum_{i=1}^n C_i \right) U_{AB}$$

Conform definiției capacității echivalente se obține:

$$C = \frac{q_A}{U_{AB}} = \sum_{i=1}^n C_i \quad (5.52)$$

În consecință:

- a) Capacitatea echivalentă a unei baterii de condensatoare legate în paralel este egală cu suma capacităților condensatoarelor componente;
- b) Tensiunea la bornele grupării este aceeași cu tensiunea la bornele fiecărui condensator;
- c) Sarcina cu care se încarcă sistemul este egală cu suma sarcinilor cu care se încarcă fiecare condensator;
- d) Gruparea în paralel este folosită atunci când se urmărește obținerea unei capacități mari.

5.4.2. Gruparea condensatoarelor electrice în serie.

Legarea în serie a condensatoarelor, Fig.5.17 b), se realizează astfel încât între cele două borne exterioare A și B să constituie o succesiune de elemente în care borna de ieșire a unuia e conectată la borna de intrare a

următorului. Tensiunea între bornele externe A și B, U_{AB} este egală cu suma tensiunilor pe fiecare condensator.

$$U_{AB} = \sum_{i=1}^n U_i$$

Sarcina electrică cu care se încarcă fiecare dintre condensatoarele legate în serie este aceeași:

$$q_1 = q_2 = \dots = q_i = \dots = q_n = q_A$$

Într-adevăr sarcina $q_1 = q_A$ de pe armătura pozitivă a primului condensator determină prin influență apariția sarcini $-q_A$ pe cealaltă armătură. Datorită conservării sarcinii, în sistemul format din a doua armătură a primului condensator și prima armătură a celui de al doilea condensator (vezi suprafața punctată din Fig.5.17 b)), sistem care trebuie să fie neutru, rezultă:

$$-q_A + q_2 = 0 \Rightarrow q_2 = q_A$$

ș.a.m.d. Dar:

$$U_i = \frac{q_i}{C_i} \Rightarrow U_{AB} = \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{C_i} = q_A \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

Conform relației de definiție a capacității echivalente rezultă:

$$C_e = \frac{q_A}{U_{AB}} = \frac{q_A}{q_A \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}} \Rightarrow C_e = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}} \Rightarrow \frac{1}{C_e} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \quad (5.53)$$

Sau în limbaj de elastanțe:

$$S_e = \sum_{i=1}^n S_i$$

În concluzie:

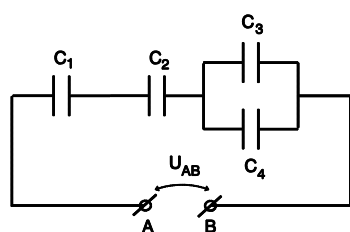
- Inversul capacității echivalente a unei baterii de condensatoare legate în serie este egal cu suma inverselor capacităților componente;
- Sarcina cu care se încarcă sistemul este aceeași cu sarcina cu care se încarcă fiecare condensator;

c) Cuplarea în serie este indicată când se urmărește obținerea unei baterii de condensatoare care să suporte tensiuni mai mari.

5.4.3. Gruparea mixtă a condensatoarelor.

Montajul mixt, Fig.5.18, constă în gruparea în serie și în paralel a diverselor condensatoare sau baterii de condensatoare și se utilizează când se urmărește obținerea unor capacități mari care să suporte tensiuni mari.

Capacitatea echivalentă se obține pe seama relațiilor anterioare de la grupa-rea serie și paralel. În acest



exemplu:

$$\frac{1}{C_e} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3 + C_4} \quad (5.54)$$

5.4.3.1. Calculul rețelelor electrostatice simple.

Fig.5.18 Grupare mixtă de condensatoare

A. Generalități - legi utilizate în analiza rețelelor.

O rețea electrostatică este un ansamblu de condensatoare și de surse de energie electrică, legate într-un mod oarecare bine definit, determinat de anumite situații din practică. Elementele rețelei sunt laturile, nodurile și ochiurile sau buclele de rețea.

- Se numește latură a unei rețele electrostatice elementul neramificat format din condensatoare și surse, fie împreună fie separat.
- Punctul de întâlnire a cel puțin trei laturi se numește nod.
- Orice circuit închis format dintr-un număr oarecare de laturi care pornind de la un anumit nod, ajunge la același nod formează o buclă sau un ochi de rețea.

În fiecare nod aplicând legea conservării sarcinii electrice se poate scrie relația:

$$\sum q_i = \text{constanța} \quad (5.55)$$

eventual constanta poate fi zero.

În baza teoremei potențialului electrostatic (în forma ei integrală, $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$), pentru fiecare buclă a rețelei se poate scrie relația evidentă între diferențele de potențial la bornele elementelor componente și tensiunile electromotoare ale surselor de energie prezente:

$$\sum_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^m U_i \quad (5.56)$$

în care E_i este tensiunea electromotoare la bornele sursei ($E_i = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$ pozitivă în sensul câmpului intern al sursei care este de la - la +) iar $U_i = \frac{q_i}{C_i} = q_i S_i$ este diferența de potențial dintre armăturile unui condensator, considerată pozitivă deasemeni în sensul câmpului dintre armături. Deci relația (5.56) se mai poate scrie:

$$\sum_{i=1}^n E_i = \sum_{i=1}^m \frac{q_i}{C_i} = \sum_{i=1}^m q_i S_i \quad (5.57)$$

Dacă pe bucla respectivă nu sunt surse rezultă:

$$\sum_{i=1}^m \frac{q_i}{C_i} = \sum_{i=1}^m q_i S_i = 0 \quad (5.58)$$

În rezolvarea circuitelor electrostatice simple, în regim permanent sunt date în general tensiunile electromotoare E_i , ale surselor, și valorile capacităților - respectiv elanțelor condensatoarelor - și se caută să se determine sarcinile q_i și tensiunile U_i la bornele acestora. Pentru aceasta sunt suficiente relațiile (5.55) și (5.57) (adică legea de conservare a sarcinii pentru noduri și teorema potențialului electrostatic pentru o buclă, relații similare cu teoremele Kirchhoff din rețelele de curent continuu studiate în cadrul electrocineticii). Se demonstrează că dacă N este numărul de noduri din rețea, L este numărul de laturi și B este numărul de bucle fundamentale

(bucle ce nu se suprapun) legea de conservare a sarcinii (relația (5.55)) se poate aplica de:

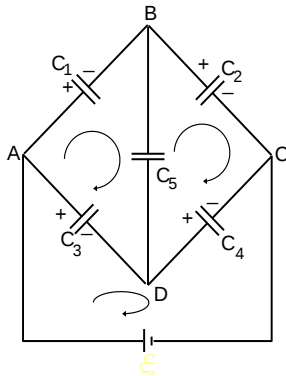
$$p = N-1 \text{ ori} \quad (5.59)$$

iar teorema potențialului (relația (5.57)) se poate aplica de:

$$B = L-N+1 \text{ ori} \quad (5.60)$$

astfel încât să se obțină în final un sistem de L ecuații independente. Relațiile (5.59) și (5.60) se numesc ecuațiile topologice ale rețelei. Din această metodă generală cu ajutorul unor teoreme speciale se deduc diverse metode de calcul ale rețelelor electrostatice, metode care în general conduc la operații mai simple și la posibilitatea utilizării calculatorului. Ele vor fi prezentate detaliat în cadrul analizei rețelelor de curent continuu.

Exemplu: Se dă rețeaua din figura 5.19, în care $C_1 = 25 \mu F$, $C_2 = 100 \mu F$, $C_3 = 50 \mu F$,



$C_4 = 100 \mu F$, $C_5 = 50 \mu F$ și $E = 1300 V$. Să se calculeze sarcinile cu care se încarcă fiecare condensator și tensiunea la bornele fiecărui condensator.

Fie q_1, q_2, q_3, q_4, q_5 sarcinile necunoscute ale condensatoarelor și q_0 , sarcina debitată de sursă, deasemenea necunoscută. Atribuim în mod arbitrar semne de polaritate armăturilor condensatoarelor.

Circuitul având $N = 4$ noduri și $L = 6$

Fig.5.19 Rețea electrostatică simplă

laturi relația (5.55) se va scrie de 3 ori și relația 5.57 deasemenea de 3 ori rezultând sistemul de 6 ecuații cu șase necunoscute:

$$\left\{ \begin{array}{l} A: \quad q_0 = q_1 + q_3 \\ B: \quad -q_1 + q_2 + q_5 = 0 \\ D: \quad -q_3 + q_4 - q_5 = 0 \\ ABDA: \quad \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_5}{C_5} - \frac{q_3}{C_3} = 0 \\ BCDB: \quad \frac{q_2}{C_2} - \frac{q_4}{C_4} - \frac{q_5}{C_5} = 0 \\ ADCA: \quad E = \frac{q_3}{C_3} + \frac{q_4}{C_4} \end{array} \right.$$

Rezolvând sistemul se obține:

$$q_1 = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ C}, \quad q_2 = 3 \cdot 10^{-2} \text{ C}, \quad q_3 = 4,5 \cdot 10^{-2} \text{ C}, \quad q_4 = 4 \cdot 10^{-2} \text{ C}, \quad q_5 = -0,5 \cdot 10^{-2} \text{ C},$$

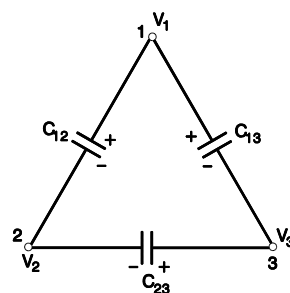
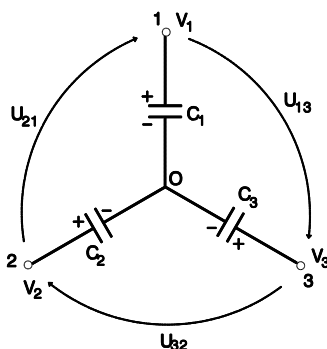
$$q_0 = 7 \cdot 10^{-2} \text{ C}, \quad U_1 = 1000 \text{ V}, \quad U_2 = 300 \text{ V}, \quad U_3 = 900 \text{ V}, \quad U_4 = 400 \text{ V}, \quad U_5 = -100 \text{ V}.$$

Semnul "-" de la q_5 arată că polaritatea la bornele condensatorului (5) este inversată față de cea considerată. Cunoscând sarcina totală q_0 debitată de sursă și absorbită de borna A a circuitului și tensiunea la bornele sursei care este chiar U_{AC} rezultă capacitatea echivalentă a rețelei:

$$C_e = \frac{q_0}{U_{AB}} = \frac{7 \cdot 10^{-2}}{1300} = 53 \frac{11}{13} 10^{-6} \text{ F}$$

B. Transfigurarea circuitelor electrostatice stea și triunghi.

Capacitatea echivalentă din rețeaua anterioară se poate calcula ușor dacă se cunoaște relația de trecere de la configurația triunghi la stea. Aceste relații sunt foarte utile în calculul capacității echivalente a rețelelor și deducerea lor înseamnă să lărgim sfera metodelor de analiză ale rețelelor electrostatice. Transfigurarea trebuie făcută astfel ca starea de echilibru al rețelei să nu se schimbe.



a)

b)

Fig.5.20 Transfigurarea unei rețele electrostatice de la configurația stea a) la configurație triunghi b)

În cazul configurației stea Fig.5.20 a), aplicând teoremele Kirchhoff se obține sistemul, de mai jos care rezolvat conduce la determinarea sarcinii absorbită prin nodul 1, în configurație stea.

$$\begin{cases} q_1 + q_2 + q_3 = 0 \\ V_1 - V_3 = \frac{q_1}{C_1} - \frac{q_3}{C_3} = U_{13} \\ V_1 - V_2 = \frac{q_1}{C_1} - \frac{q_2}{C_2} = U_{12} \\ V_1 - V_3 + V_3 - V_2 + V_2 - V_1 = 0 \end{cases}$$

$$U_{13} + U_{32} - U_{12} = 0$$

$$q_2 = \frac{C_2}{C_1} q_1 - C_2 U_{12}$$

$$q_3 = \frac{C_3}{C_1} q_1 - C_3 U_{13}$$

$$q_1 \left(1 + \frac{C_2}{C_1} + \frac{C_3}{C_1} \right) = C_2 U_{12} + C_3 U_{13} \Rightarrow q_1 = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2 + C_3} U_{12} + \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_2 + C_3} U_{13} \quad (5.61)$$

Din configurația triunghi Fig.5.20b), sarcina q_1 absorbită de nodul 1, în configurație triunghi este:

$$q_1 = q_{13} + q_{12} = (V_1 - V_3)C_{13} + (V_1 - V_2)C_{12} = U_{13}C_{13} + U_{12}C_{12} \quad (5.62)$$

Identificând (5.61) cu (5.62) se obține:

$$\begin{cases} C_{12} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2 + C_3} \\ C_{13} = \frac{C_1 C_3}{C_1 + C_2 + C_3} \\ C_{23} = \frac{C_2 C_3}{C_1 + C_2 + C_3} \end{cases} \quad (5.63)$$

Rezolvând sistemul (5.63) invers, adică având date capacitățile triunghiului și ca necunoscute pe cele ale stelei se obține:

$$\begin{cases} C_1 = C_{12} + C_{13} + \frac{C_{12}C_{13}}{C_{23}} \\ C_2 = C_{12} + C_{23} + \frac{C_{12}C_{23}}{C_{13}} \\ C_3 = C_{13} + C_{23} + \frac{C_{13}C_{23}}{C_{12}} \end{cases} \quad (5.64)$$

5.5. Energia electrostatică a sistemelor de conductoare la echilibru electrostatic.

5.5.1. Energia electrostatică a unui conductor izolat în spațiu.

Fie un conductor izolat în spațiu, încărcat cu o sarcină q și care se află la un potențial V . Pentru a determina energia electrostatică a acestui corp se presupune la început corpul în stare neutră ($q = 0$, $V = 0$) apoi se aduce sarcina q de la infinit pe conductor în cantități infinit mici. Operația se efectuează foarte lent și izoterm pentru ca echilibrul electrostatic să nu fie nici un moment perturbat (fără dezvoltare sau transfer de căldură), în medii liniare din punct de vedere electric. Lucrul mecanic total care trebuie efectuat în aceste condiții pentru a aduce sarcina de la infinit pe corpul ce trebuie încărcat este egal cu energia electrostatică a conductorului considerat. Fie x un parametru variabil ($0 \leq x \leq 1$) cu ajutorul căruia se caracterizează în orice moment starea de electrizare a corpului. La un moment dat, după un număr oarecare de încărcări prin aduceri de sarcini, starea de electrizare a corpului este caracterizată de sarcina qx și potențialul corpului Vx . Pentru a aduce de la infinit o sarcină elementară $dq = qdx$, pe corpul care se găsește la potențialul Vx , trebuie să efectuăm asupra sistemului un lucru mecanic:

$$-dL = dW = Vxqdx = qVxdx \quad (5.65)$$

care constituie o creștere a energiei electrostatice a corpului respectiv. Energia totală a sistemului este egală cu suma lucrurilor mecanice

elementare efectuate prin aducerea sarcinilor elementare dq pentru încărcarea corpului:

$$-L = W = \int_0^1 qV_x dx = qV \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} qV \quad (5.66)$$

Ținând seama de definiția capacității proprii a conductorului expresia energiei electrostatice a unui corp izolat în spațiu poate căpăta formele următoare:

$$W = \frac{1}{2} qV = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \quad (5.67)$$

5.5.2. Energia electrostatică a unui sistem de conductoare încărcate.

Fie un sistem constituit din n conductoare încărcate $A_1, \dots, A_n$, având fiecare sarcina q_i respectiv potențialul V_i ($i = 1 \dots n$). Ca și-n cazul unui singur conductor se poate trece de la starea neutră a conductoarelor la starea actuală prin aducerea de sarcini elementare de la infinit pe fiecare din corpurile sistemului dat. Această operație se efectuează cu ajutorul unor mici corpuri de probă, lent și izoterm astfel încât echilibrul electrostatic să nu fie nici un moment perturbat, mediul fiind presupus liniar din punct de vedere electric. Așa în acest caz starea de încărcare cu sarcină electrică a corpurilor va fi caracterizată cu ajutorul unui parametru x ($0 \leq x \leq 1$) în sensul că la un moment dat fiecare corp din sistem poartă sarcina $q_i x$ și se află la potențialul $V_i x$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Pentru a trece acum de la starea x la starea $x + dx$ trebuie aduse de la infinit, pe conductoarele care au potențialele $V_i x$ ($i = 1 \dots n$), sarcinile elementare $q_i dx$ ($i = 1, 2, \dots, n$) astfel că lucrul mecanic total care trebuie efectuat este:

$$-dL = dW = \sum_{i=1}^n V_i x q_i dx = \sum_{i=1}^n q_i V_i x dx \quad (5.68)$$

Lucrul mecanic total cheltuit pentru încărcarea sistemului de conductoare va fi egal cu energia electrostatică înmagazinată în sistem și care este dată de relația:

$$-L = W = \int_0^1 \sum_{i=1}^n q_i V_i x dx = \sum_{i=1}^n q_i V_i \int_0^1 x dx = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i \quad (5.69)$$

ținând seama de relațiile Maxwell care exprimă sarcinile conductoarelor în funcție de potențialele lor:

$$q_i = \sum_{j=1}^n C_{ij} V_j \quad (5.70)$$

relația (5.69) devine:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{ij} V_j V_i = \\ &= \frac{1}{2} [C_{11} V_1^2 + 2C_{12} V_1 V_2 + C_{22} V_2^2 + 2C_{13} V_1 V_3 + \dots + C_{nn} V_n^2] \end{aligned} \quad (5.71)$$

Sau dacă se folosesc relațiile lui Maxwell care exprimă potențialele conductoarelor în funcție de sarcinile lor folosind elanțele se obține:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n S_{ij} q_j q_i = \\ &= \frac{1}{2} [S_{11} q_1^2 + 2S_{12} q_1 q_2 + S_{22} q_2^2 + 2S_{13} q_1 q_3 + \dots + S_{nn} q_n^2] \end{aligned} \quad (5.72)$$

Relațiile (5.70), (5.71), (5.72), pot fi folosite la calculul energiei diverselor sisteme de conductoare exprimând-o fie în funcție de sarcini și potențiale, fie în funcție de capacități și potențiale, fie în funcție de elanțele și sarcini. De exemplu în cazul sistemului binar de conductoare aflate la influență electrostatică maximă (condensatorul), pentru care: $q_1 = Q$, $q_2 = -Q$ și $U_{12} = V_1 - V_2$, relațiile de mai sus conduc la:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i = \frac{1}{2} (QV_1 - QV_2) = \frac{1}{2} QU_{12} \quad (5.73)$$

sau:

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j C_{ij} V_i V_j = \frac{1}{2} (C_{11} V_1^2 + 2C_{12} V_1 V_2 + C_{22} V_2^2)$$

Dar:

$$C_{11} = -C_{12} = C_{22} = C \Rightarrow W = \frac{1}{2} C (V_1^2 - 2V_1 V_2 + V_2^2) \Rightarrow$$

$$W = \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2 = \frac{1}{2} C U_{12}^2 \quad (5.74)$$

Sau

$$W = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j S_{ij} q_i q_j = \frac{1}{2} (S_{11} q_1^2 + 2S_{12} q_1 q_2 + S_{22} q_2^2)$$

Dar

$$\begin{cases} V_1 = S_{11} q_1 + S_{12} q_2 = (S_{11} - S_{12}) Q \\ V_2 = S_{21} q_1 + S_{22} q_2 = (S_{21} - S_{22}) Q \end{cases} \Rightarrow$$

$$V_1 - V_2 = [S_{11} - S_{12} - (S_{21} - S_{22})] Q = 2(S_{11} - S_{12}) Q \Rightarrow S_{11} - S_{12} = \frac{V_1 - V_2}{2Q}$$

pentru că $S_{11} = S_{22}$ și $S_{12} = S_{21}$

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{1}{S_{11}} \Rightarrow S_{11} = \frac{V_1 - V_2}{Q} \Rightarrow S_{11} = 2(S_{11} - S_{12}) \Rightarrow S_{12} = \frac{1}{2} S_{11}$$

Cu acestea:

$$W = \frac{1}{2} q^2 \left(S_{11} - 2 \frac{S_{11}}{2} + S_{11} \right) = \frac{1}{2} S_{11} q^2 = \frac{q^2}{2C} \quad (5.75)$$

5.6. Energia electrostatică

În cazul unui sistem de sarcini punctiforme energia electrostatică a sistemului este dată așa cum am văzut tot de relația generală:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i \quad (5.76)$$

în care V_i este potențialul punctului în care se află sarcina q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) potențial stabilit fără contribuția acestei sarcini. În cazul distribuțiilor continue de sarcină arătam că energia electrostatică se exprimă prin relațiile:

$$W_\lambda = \frac{1}{2} \int_L \lambda V dl \quad \text{pentru distribuție liniară}$$

$$W_\sigma = \frac{1}{2} \int_S \sigma V dS \quad \text{pentru distribuție superficială}$$

$$W_\rho = \frac{1}{2} \int_V \rho V dV \quad \text{pentru distribuție volumică.}$$

Cu acestea energia electrostatică a unei regiuni din spațiu în care se găsesc atât conductoare purtând sarcini electrice, cât și sarcini punctiforme sau corpuri încărcate cu distribuție volumică, superficială și liniară va fi conform principiului superpoziției:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i-1} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon r_{ij}} + \frac{1}{2} \int_L \lambda V dl + \frac{1}{2} \int_S \sigma V dS + \frac{1}{2} \int_V \rho V dV \quad (5.77)$$

În cazul când pentru unul sau mai multe conductoare din sistem fie potențialul fie sarcina sunt nule, termenii corespunzători din sumele din relațiile (5.77), sunt nuli. La prima vedere s-ar părea că nu se mai ține seama, în calculul energiei electrostatice, de prezența acestor conductoare, trebuie însă reținut că acele conductoare nu pot fi suprimate din sistem deoarece prin aceasta s-ar modifica starea de echilibru a sistemului adică repartiția de potențiale și de sarcini de la suprafața corpurilor s-ar modifica ceea ce ar conduce la o altă valoare a energiei electrostatice a sistemului.